Leichte und klare Analysis, die zu höchst abstrusen Reihen führt, mit welchen nicht nur die Wurzeln aller algebraischen Gleichungen sondern auch jedwede Potenzen derer ausgedrückt werden können*

Leonhard Euler

Problem

§1 *Nach Vorlage einer aus drei Termen bestehenden algebraischen Gleichung, welche sich immer in dieser Form darstellen lässt*

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta},$$

die Reihe zu finden, welche den Wert von x^n ausdrückt.

Lösung

Diese Gleichung kann durch Setzen von $x = A^{\frac{1}{\alpha}} Z$ immer in diese einfachere Form gebracht werden

*Originaltitel: "Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band* 4 (1776, geschrieben 1790): pp. 55 – 73, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 7, pp. 384 – 404, Eneström Nummer E631, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}} Z^\beta},$$

woher durch Setzen $B = A^{\frac{\beta}{\alpha}} C$

$$1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{C}{Z^\beta}$$

sein wird, welche mit Z^n multipliziert

$$Z^n = Z^{n-\alpha} + CZ^{n-\beta}$$

liefert; daher muss also der Wert der Potenz Z^n gesucht werden, weil ja daher

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} Z^n$$

sein wird. Es ist aber offenkundig, dass der Wert von Z^n mit einer Reihe ausgedrückt werden muss, in welche der Exponent n eingeht, welche sich also als Funktion von n betrachten lassen wird, und weil diese Reihe aus unendlich vielen Termen besteht, wollen wir sie so darstellen

$$Z^n = f^0 : n + f' : n + f'' : n + f''' : n + f'''' : n + \text{etc.},$$

welche Form also so beschaffen sein muss, dass, nachdem $n = 0$ gesetzt worden ist, $Z^n = 1$ ist; daher ist es klar, dass $f^0 : n = 1$ festgelegt werden muss, die übrigen Terme hingegen aber den Faktor n haben müssen, dass sie für $n = 0$ verschwinden und $Z^0 = 1$ hervorgeht.

§2 Wenn wir nach Festlegen dieser Reihe $n - \alpha$ anstelle von n schreiben, werden wir

$$Z^{n-\alpha} = f^0 : (n-\alpha) + f' : (n-\alpha) + f'' : (n-\alpha) + +f''' : (n-\alpha) + \text{etc.}$$

haben und in gleicher Weise wird

$$Z^{n-\beta} = f^0 : (n-\beta) + f' : (n-\beta) + f'' : (n-\beta) + +f''' : (n-\beta) + \text{etc.}$$

sein, wo man wiederum bemerke, dass $f^0 : (n-\alpha) = 1$ und $f^0 : (n-\beta) = 1$ sein muss. Weil nun unsere Gleichung $Z^n - Z^{n-\alpha} = CZ^{n-\beta}$ ist, wollen wir anstelle der Potenzen von Z die angenommenen Reihen schreiben, und dies auf die folgende Weise

$$\begin{array}{llllll} +Z^n & = +f^0:n & +f':n & +f'':n & +f''':n & +\text{etc.} \\ -Z^{n-\alpha} & = -f^0:(n-\alpha) & -f':(n-\alpha) & -f'':(n-\alpha) & -f''':(n-\alpha) & -\text{etc.} \\ \hline =CZ^{n-\beta} & = +Cf^0:(n-\beta) & +Cf':(n-\beta) & +Cf'':(n-\beta) & +Cf''':(n-\beta) & +\text{etc.} \end{array}$$

Nun werden diese unbestimmten Funktionen so bestimmt werden, dass wird:

$$\begin{array}{rlcl} \text{I.} & f':n-f':(n-\alpha) & = & Cf^0:(n-\beta)=C, \\ \text{II.} & f'':n-f'':(n-\alpha) & = & Cf':(n-\beta), \\ \text{III.} & f''':n-f''':(n-\alpha) & = & Cf'':(n-\beta), \\ \text{IV.} & f'''':n-f'''':(n-\alpha) & = & Cf''':(n-\beta) \\ & & \text{etc.} & \end{array}$$

§3 Mithilfe dieser Gleichung muss also zuerst die Natur der Funktion $f:n$ gesucht werden, dass sie der ersten Gleichung Genüge leistet; nachdem diese gefunden worden ist, wird die Funktion $f':(n-\beta)$ bekannt werden und aus ihr muss gemäß der zweiten Gleichung die Beschaffenheit der Funktion $f'':n$ ermittelt werden, woher die Funktion $f'':(n-\beta)$ bekannt werden wird und daher wird weiter auf die gleiche Weise aus der dritten Gleichung die Gestalt der Funktion $f''':n$ abgeleitet werden und so weiter, bis schließlich das Gesetz klar wird, nach welchem diese einzelnen Funktionen weiter fortschreiten; daher ist es offenkundig, dass die Auflösung all dieser Gleichungen auf diese Frage zurückgeführt wird, nach welcher nach Vorlage einer Funktion von n eine andere Funktion gesucht wird, wie beispielsweise φ, dass

$$\varphi:n-\varphi:(n-\alpha)=N$$

wird, für welches Ziel wir die folgenden Lemmata entwickeln wollen.

Lemma 1

§4 Wenn

$$\varphi : n = \Delta n$$

war, wird

$$\varphi : (n - \alpha) = \Delta(n - \alpha)$$

und daher

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Delta\alpha$$

sein; daher wird man umgekehrt, wenn $\Delta\alpha = k$ gesetzt wird, dass $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k$ werden muss,

$$\varphi : n = \frac{kn}{\alpha}$$

finden. Daher, weil aus der ersten Gleichung $f' : n - f' : (n - \alpha) = C$ sein muss, ist es notwendig, dass $f' : n = \frac{Cn}{\alpha}$ sein muss, woher für die zweite Gleichung

$$f' : (n - \beta) = \frac{C}{\alpha}(n - \beta)$$

werden wird.

LEMMA 2

§5 Wenn

$$\varphi : n = \Delta n(n + \alpha - v)$$

war, wird

$$\varphi : (n - \alpha) = \Delta(n - \alpha)(n - v)$$

sein, woher man

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = 2\Delta\alpha\left(n - \frac{1}{2}v\right)$$

berechnet. Wenn also $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = k(n - \lambda)$ hervorgehen muss, wird wegen $\Delta = \frac{k}{2\alpha}$ und $v = 2\lambda$

$$\varphi : n = \frac{kn}{2\alpha}(n+\alpha-2\lambda)$$

sein. Daher, weil die zweite Gleichung nun

$$f'' : n - f'' : (n-\alpha) = Cf' : (n-\beta) = \frac{CC}{\alpha}(n-\beta)$$

ist, wird wegen $k = \frac{CC}{\alpha}$ und $\lambda = \beta$

$$f'' : n = \frac{CC}{2\alpha\alpha}n(n+\alpha-2\beta)$$

sein, woher für die dritte Gleichung

$$f'' : (n-\beta) = \frac{CC}{2\alpha\alpha}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta)$$

werden wird.

Lemma 3

§6 Wenn

$$\varphi : n = \Delta n(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)$$

war, wird

$$\varphi : (n-\alpha) = \Delta(n-\alpha)(n-v)(n+\alpha-v)$$

sein; daher wird also

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = 3\Delta\alpha(n+\alpha-v)\left(n-\frac{1}{3}v\right),$$

woher umgekehrt nach Setzen von $3\Delta\alpha = k$ und $\frac{1}{3}v = \lambda$, dass $k(n+\alpha+3\lambda)(n-\lambda)$ hervorgeht,

$$\varphi : n = \frac{kn}{3\alpha}(n+\alpha-3\lambda)(n+2\alpha-3\lambda)$$

genommen werden muss. Weil nun für unsere dritte Gleichung

$$f''' : n - f''' : (n-\alpha) = \frac{C^3}{2\alpha\alpha}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta)$$

werden muss, wird nach entsprechender Anpassung $k = \frac{C^3}{2\alpha\alpha}$ und $\lambda = \beta$ werden und daher folgert man, dass

$$f''' : n = \frac{C^3}{6\alpha^3} n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta)$$

sein wird, woher wir für die folgende Gleichung

$$f''' : (n-\beta) = \frac{C^3}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)$$

haben werden.

LEMMA 4

§7 Wenn

$$\varphi : n = \Delta n(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)$$

war, wird

$$\varphi : (n-\alpha) = \Delta(n-\alpha)(n-v)(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)$$

und daher

$$\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = 4\Delta\alpha(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)\left(n-\frac{1}{4}v\right)$$

sein. Wenn also $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)$ sein muss, muss $\Delta = \frac{k}{4\alpha}$ und $v = 4\lambda$ genommen werden und daher wird

$$\varphi : n = \frac{kn}{4\alpha}(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)(n+3\alpha-4\lambda)$$

werden. Daher, weil unsere vierte Gleichung

$$f'''' : n - f'''' : (n-\alpha) = \frac{C^4}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)$$

ist, wird nach entsprechender Anwendung $k = \frac{C^4}{6\alpha^3}$ und $\lambda = \beta$ werden und daher schließt man, dass

$$f'''' : n = \frac{C^4}{24\alpha^4} n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta)$$

sein wird, woher wir für die fünfte Gleichung

$$f'''':(n-\beta)=\frac{C^4}{24\alpha^4}(n-\beta)(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta)$$

erhalten werden.

Lemma 5

§8 Wenn

$$\varphi:n=\Delta n(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)(n+4\alpha-v)$$

war, wird

$$\varphi:(n-\alpha)=\Delta(n-\alpha)(n-v)(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)$$

und daher

$$\varphi:n-\varphi:(n-\alpha)=5\Delta\alpha(n+\alpha-v)(n+2\alpha-v)(n+3\alpha-v)\left(n-\frac{1}{5}v\right)$$

sein. Daher, wenn

$$\varphi:n-\varphi:(n-\alpha)=k(n-\lambda)(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)$$

sein muss, muss $\Delta=\frac{k}{5\alpha}$ und $5\lambda=v$ genommen werden; dann wird aber

$$\varphi:n=\frac{k}{5\alpha}n(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)(n+4\alpha-5\lambda)$$

sein. Weil sich aber die fünfte Gleichung so verhält

$$f''''':n-f''''':(n-\alpha)=\frac{C^5}{24\alpha^4}(n-\beta)(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta),$$

muss hier $k=\dfrac{C^5}{24\alpha^4}$ und $\lambda=\beta$ genommen werden, woher man

$$f''''' : n = \frac{C^5}{120\alpha^5} n(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta)(n+4\alpha-5\beta)$$

folgert. Daher lässt sich ohne weitere Rechnung schlussfolgern, dass

$$f^{\mathrm{VI}} : n = \frac{C^6}{720\alpha^6} n(n+\alpha-6\beta)(n+2\alpha-6\beta)(n+3\alpha-6\beta) \\ \times(n+4\alpha-6\beta)(n+5\alpha-6\beta)$$

und

$$f^{\mathrm{VII}} : n = \frac{C^7}{5040\alpha^7} n(n+\alpha-7\beta)(n+2\alpha-7\beta)(n+3\alpha-7\beta) \\ \times(n+4\alpha-7\beta)(n+5\alpha-7\beta)(n+6\alpha-7\beta)$$

sein wird.

Finale Schlussfolgerung

§9 Wenn durch Sammeln von diesen die vorgelegte Gleichung $1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{C}{Z^\beta}$ war, dann resultiert für jedwede Potenz von Z die folgende Reihe

$$Z^n = 1 + \frac{C}{\alpha}n + \frac{CC}{2\alpha\alpha}n(n+\alpha-2\beta) + \frac{C^3}{6\alpha^3}n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta) \\ + \frac{C^4}{24\alpha^4}n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta) \\ + \frac{C^5}{120\alpha^5}n(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta)(n+4\alpha-5\beta) + \text{etc.}$$

Scholion

§10 Diese Reihe, die wir gefunden haben, ist umso bemerkenswerter, weil kein anderer Weg offen steht sie ausfindig zu machen. Ja, unsere Analysis ist sogar von solcher Beschaffenheit, dass die Gültigkeit der Lösung nicht nicht auf alle ganzen Exponenten n, sondern auch auf alle gebrochenen und sogar negativen Werte ausgedehnt wird. Außerdem kann aber aus unserer allgemeinen Reihe auch der hyperbolische Logarithmus von Z ausgedrückt werden. Weil nämlich im Fall $n = 0$ immer

$$\frac{Z^n - 1}{n} = \log Z$$

ist, wird in unserem Fall

$$\begin{aligned}\log Z = \frac{C}{\alpha} + \frac{CC}{2\alpha^2}(\alpha - 2\beta) + \frac{C^3}{6\alpha^3}(\alpha - 3\beta)(2\alpha - 3\beta)\\ + \frac{C^4}{24\alpha^4}(\alpha - 4\beta)(2\alpha - 4\beta)(3\alpha - 4\beta)\\ + \frac{C^5}{120\alpha^5}(\alpha - 5\beta)(2\alpha - 5\beta)(3\alpha - 5\beta)(4\alpha - 5\beta) + \text{etc.}\end{aligned}$$

sein. Daher, wenn diese ganze Reihe mit dem Buchstaben Δ bezeichnet wird, dass $\log Z = \Delta$ ist, wird $Z = e^\Delta$ sein und daher

$$Z^n = e^{n\Delta},$$

welche Größe also der oben für Z^n gefundenen Reihe gleich sein wird. Aber dieser Ausdruck $e^{n\Delta}$ liefert in eine Reihe entwickelt

$$Z^n = 1 + n\Delta + \frac{1}{2}nn\Delta^2 + \frac{1}{6}n^3\Delta^3 + \frac{1}{24}n^4\Delta^4 + \frac{1}{120}n^5\Delta^5 + \text{etc.},$$

welche Reihe der oben gefundenen Reihe notwendig gleich sein wird, was auch bestätigt werden wird, während zumindest die ersten Terme entwickelt werden. Während nämlich

$$\Delta = \frac{C}{\alpha} + \frac{CC}{2\alpha^2}(\alpha - 2\beta) + \frac{C^3}{6\alpha^3}(\alpha - 3\beta)(2\alpha - 3\beta) + \text{etc.}$$

ist, wird

$$\Delta^2 = \frac{CC}{\alpha^2} + \frac{C^3}{\alpha^3}(\alpha - 2\beta) + \text{etc.}$$

$$\Delta^3 = \frac{C^3}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

sein, woher wir

$$
\begin{aligned}
Z^n = 1 + \frac{C}{\alpha}n + \frac{CC}{2\alpha\alpha}n(\alpha-2\beta) &+ \frac{C^3}{6\alpha^3}n(\alpha-3\beta)(2\alpha-3\beta) + \text{etc.}\\
+ \frac{CC}{2\alpha\alpha}nn \qquad &+ \frac{C^3}{2\alpha^3}nn(\alpha-2\beta) + \text{etc.}\\
&+ \frac{C^3}{6\alpha^3}n^3 + \text{etc}
\end{aligned}
$$

oder

$$
Z^n = 1 + \frac{C}{\alpha}n + \frac{CC}{2\alpha\alpha}n(n+\alpha-2\beta)
$$

$$
+\frac{C^3}{6\alpha^3}(n(\alpha-3\beta)(2\alpha-3\beta) + nn(n+3\alpha-6\beta)) + \text{etc.}
$$

ableiten, was mit der oben für Z^n gefundenen Reihe vorzüglich übereinstimmt.

Allgemeines Theorem

§11 *Wenn also die eingangs erwähnte Gleichung*

$$
1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}
$$

vorgelegt war, weil wir ja

$$
Z = \frac{x}{A^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \textit{und} \quad C = \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}}}
$$

gesetzt haben, wird

$$
\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}}}\cdot\frac{n}{\alpha} + \frac{B^2}{A^{\frac{2\beta}{\alpha}}}\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha} + \frac{B^3}{A^{\frac{3\beta}{\alpha}}}\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha}
$$

$$
+\frac{B^4}{A^{\frac{4\beta}{\alpha}}}\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha} + \text{etc.}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + A^{\frac{n-\beta}{\alpha}}B\cdot\frac{n}{\alpha} + A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}}B^2\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}\\
+A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}}B^3\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha}
\end{aligned}
$$

$$+A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}}B^4\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}$$
$$+A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}}B^5\cdot\frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-5\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-5\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-5\beta}{4\alpha}\cdot\frac{n+4\alpha-5\beta}{5\alpha}+\text{etc}$$

sein. Umgekehrt wird also nach Vorlegen dieser Reihe ihre Summe $= x^n$ *sein, während* x *die Wurzel dieser Gleichung*

$$1=\frac{A}{x^\alpha}+\frac{B}{x^\beta}$$

sein wird, was sich an einigen Beispielen illustrieren lässt.

Beispiel 1

§12 Wir wollen $\alpha=1$ und $\beta=1$ setzen, dass diese Gleichung vorgelegt ist

$$1=\frac{A}{x}+\frac{B}{x},$$

woher $x=A+B$ wird, also

$$x^n=(A+B)^n;$$

aber die gefundene Reihe gibt uns in diesem Fall

$$(A+B)^n=A^n+\frac{n}{1}A^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}A^{n-2}B^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}A^{n-3}B^3+\text{etc.},$$

welches die Newton'sche Entwicklung des Binoms ist, welche nun bekannt ist wahr zu sein, welche Zahl auch immer für den Exponenten n angenommen wird, ob ganzzahlig oder gebrochen, ob positiv oder negativ, oder sogar surdisch; wohingegen in der gewöhnlichen Algebra, wo diese Entwicklung behandelt worden ist, der Exponent n notwendig eine positive ganze Zahl ist.

Beispiel 2

§13 Wir wollen wir zuvor $\alpha=1$ setzen, aber man nehme $\beta=0$, sodass nun

$$1=\frac{A}{x}+B$$

ist, woher $x=\frac{A}{1-B}$ wird, als logische Konsequenz

$$x^n = \frac{A^n}{(1-B)^n} = A^n(1-B)^{-n};$$

aber die Reihe, zu welcher wir geführt worden sind, wird in diesem Fall

$$A^n(1-B)^{-n} = A^n + \frac{n}{1}A^nB + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}A^nB^2 + \text{etc.}$$

oder

$$(1-B)^{-n} = 1 + \frac{n}{1}B + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}B^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}B^3 + \text{etc.}$$

sein, welches der Beweis desselben NEWTON'SCHEN Lehrsatzes für negative Potenzen ist.

BEISPIEL 3

§14 Wir wollen $A = 2a$ und $B = b$ nehmen und es sei weiter $\alpha = 1$ und $\beta = 2$, dass unsere Gleichung

$$1 = \frac{2a}{x} + \frac{b}{xx}$$

oder $xx = 2ax + b$ wird, woher

$$x = a + \sqrt{aa+b}$$

wird, nach Einsetzen welches Wertes die zuvor gefundene Reihe

$$\begin{aligned}(a+\sqrt{aa+b})^n &= 2^na^n + \frac{n}{1}2^{n-2}a^{n-2}b + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}2^{n-4}a^{n-4}bb\\ \frac{n(n-5)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}&2^{n-6}a^{n-6}b^3 + \frac{n(n-7)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-8}a^{n-8}b^4 + \text{etc.}\end{aligned}$$

liefern wird, deren Gültigkeit für den Fall, in dem $n = 1$ ist, aus der üblichen Entwicklung heraus bestätigt werden kann. Denn für $n = 1$ wird

$$a + \sqrt{aa+b} = 2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{2^3a^3} + \frac{b^3}{2^4a^5} - \frac{5b^4}{2^7a^7} + \frac{7b^5}{2^8a^9} - \text{etc.}$$

sein; aber wir wissen, dass aus der gewöhnlichen Auflösung

$$\sqrt{aa+b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{1\cdot 1bb}{2\cdot 4a^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3b^3}{2\cdot 4\cdot 6a^5} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^7} + \text{etc.}$$

ist; wenn zu dieser a addiert wird, geht jene Reihe von oben hervor.

Beispiel 4

§15 Wir wollen $\alpha = 2$ und $\beta = 1$ nehmen, dass

$$1 = \frac{A}{xx} + \frac{B}{x}$$

oder $xx = A + Bx$ und daher

$$x = \frac{B + \sqrt{BB + 4A}}{2}$$

ist; anstelle von A wollen wir aber aa schreiben und $2b$ anstelle von B, dass

$$x = b + \sqrt{bb + aa}$$

ist, weshalb die gefundene Reihe uns

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{2}a^{n-1} \cdot 2b + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4}a^{n-2} \cdot 4bb$$
$$+\frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n+1}{6}a^{n-3} \cdot 8b^3 + \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n}{6} \cdot \frac{n+2}{8}a^{n-4} \cdot 16b^4 + \text{etc.}$$

geben wird, welche auf diese Form

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2}a^{n-2}bb$$
$$+\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \frac{n+2}{4}a^{n-4}b^4 + \text{etc.}$$

zurückgeführt wird; diese Form wird aber weiter auf diese reduziert werden

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{nn}{1 \cdot 2}bb$$
$$+\frac{n(nn-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \frac{nn(nn-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-4}b^4 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^{n-5}b^5$$
$$+\frac{nn(nn-4)(nn-16)}{1 \cdot 2 \cdots 6}a^{n-6}b^6 + \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1 \cdot 2 \cdots 7}a^{n-7}b^7 + \text{etc.}$$

So, wenn wir $n = 1$ nehmen, werden wir

$$b + \sqrt{bb + aa} = a + b + \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{bb}{a} - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^3} + \frac{3 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdots 6} \cdot \frac{b^6}{a^5} - \text{etc.}$$

haben; wir wissen aber, dass

$$\sqrt{bb+aa} = a + \frac{1}{2}\cdot\frac{bb}{a} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^4}{a^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^6}{a^5} - \text{etc.}$$

ist; wenn zu dieser b addiert wird, geht jene Reihe selbst hervor.

Beispiel 5

§16 Wir wollen $\alpha = 1$ und $\beta = -1$ nehmen, dass unsere Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + Bx$$

ist, woher

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B}$$

wird; daher geht also

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B}\right)^n = A^n + \frac{n}{1}A^{n+1}B + \frac{n(n+3)}{1\cdot 2}A^{n+2}B^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n+3}B^3$$

$$+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^{n+4}B^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{n+5}B^5 + \text{etc.}$$

hervor. Daher wird also, wenn wir $n = 1$ nehmen,

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B} = A + A^2B + \frac{4}{2}A^3B^2 + \frac{5\cdot 6}{2\cdot 3}A^4B^3 + \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}A^5B^4$$
$$+\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^6B^5 + \text{etc.}$$

sein. Es ist aber

$$\sqrt{1-4AB} = 1 - 2AB - 2A^2B^2 - 4A^3B^3 - 2\cdot 5A^4B^4 - \text{etc.};$$

diese Reihe von der Einheit abgezogen und durch $2B$ geteilt liefert die gerade gefundene Reihe.

Scholion

§17 Aber die allgemeine Reihe, welche wir oben gefunden haben, ist zuerst vom sehr scharfsinnigen Lambert aus ganzen anderen Prinzipien heraus entdeckt worden, welche Reihe sich daher auch Lambert'sche Reihe nennen lässt, weil sie mit Recht zu den außerordentlichen Entdeckungen dieses Herrn zu zählen ist. Aber die Methode, die wir hier gebraucht haben, kann auf viel allgemeinere Gleichungen ausgedehnt werden, wannimmer natürlich die vorgelegte Gleichung vier oder mehr Terme beinhaltet; es wird der Mühe Wert sein, dies für den Fall von vier Termen gezeigt zu haben.

Allgemeineres Problem

§18 *Wenn eine algebraische Gleichung von dieser Form vorgelegt war*

$$1-\frac{1}{Z^{\alpha}}=\frac{B}{Z^{\beta}}+\frac{C}{Z^{\gamma}},$$

die Reihe zu finden, welche den Wert einer beliebigen Potenz von Z, wie Z^n, ausdrückt.

Lösung

Man multipliziere die vorgelegte Gleichung mit Z^n, dass man

$$Z^n-Z^{n-\alpha}=BZ^{n-\beta}+CZ^{n-\gamma}$$

hat, und die gesuchte Potenz Z^n wird sich wie zuvor als Funktion von n ansehen lassen, welche aus mehreren Teilen bestehend so dargestellt werde, dass

$$Z^n=f^0:n+f':n+f'':n+f''':n+f'''':n+\text{etc.}$$

ist. Hier, weil für $n=0$ genommen $Z^n=1$ werden muss, sei immer $f^0:n=1$; aber damit die übrigen Anteile im Fall $n=0$ verschwinden, müssen die einzelnen notwendig den Faktor n haben. Daher wird also gelten:

$$\begin{aligned}
Z^{n-\alpha}&=f^0:(n-\alpha)\ +f':(n-\alpha)\ +f'':(n-\alpha)\ +\text{etc.},\\
Z^{n-\beta}&=f^0:(n-\beta)\ +f':(n-\beta)\ +f'':(n-\beta)\ +\text{etc.},\\
Z^{n-\gamma}&=f^0:(n-\gamma)+f':(n-\gamma)+f'':(n-\gamma)+\text{etc.},
\end{aligned}$$

Nun setze man diese Reihen anstelle dieser Potenzen in unserer Gleichung ein, und weil die Anteile auf der linken Seite sich von selbst aufheben, werden die übrigen linken Anteile den vorhergehenden Anteilen auf der rechten Seiten gleich werden müssen, woher die folgenden Gleichungen resultieren werden:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad f' : n - f' : (n-\alpha) = Bf^0 : (n-\beta) + Cf^0 : (n-\gamma) = B + C,\\
&\text{II.} \quad f'' : n - f'' : (n-\alpha) = Bf' : (n-\beta) + Cf' : (n-\gamma),\\
&\text{III.} \quad f''' : n - f''' : (n-\alpha) = Bf'' : (n-\beta) + Cf'' : (n-\gamma),\\
&\text{IV.} \quad f'''' : n - f'''' : (n-\alpha) = Bf''' : (n-\beta) + Cf''' : (n-\gamma)\\
&\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

§19 Wir wollen nun die oben erwähnten Lemmata zur Hilfe nehmen, aus welchen bekannt ist, dass es sein wird wie folgt:

I. Wenn $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k$ war, wird gelten

$$\varphi : n = \frac{kn}{\alpha}.$$

II. Wenn $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)$ war, wird gelten

$$\varphi : n = \frac{kn}{2\alpha}(n+\alpha-2\lambda).$$

III. Wenn $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-3\lambda)$ war, wird gelten

$$\varphi : n = \frac{kn}{3\alpha}(n+\alpha-3\lambda)(n+2\alpha-3\lambda).$$

IV. Wenn $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)$ war, wird gelten

$$\varphi : n = \frac{kn}{4\alpha}(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)(n+3\alpha-4\lambda).$$

IV. Wenn $\varphi : n - \varphi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)$ war, wird gelten

$$\varphi : n = \frac{kn}{5\alpha}(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)(n+4\alpha-5\lambda).$$

und so weiter

§20 Mithilfe dieser Lemmata finden wir aus der ersten Gleichung, wo für das erste Lemma $k = B + C$ ist,

$$f' : n = \frac{Bn}{\alpha} + \frac{Cn}{\alpha};$$

daher wird also für die zweite Gleichung

$$Bf' : (n-\beta) = B^2\frac{n-\beta}{\alpha} + BC\frac{n-\beta}{\alpha}$$

und

$$Cf' : (n-\gamma) = C^2\frac{n-\gamma}{\alpha} + BC\frac{n-\gamma}{\alpha}$$

also die

$$\text{Summe} = \frac{BB(n-\beta)}{\alpha} + \frac{2BC}{\alpha}\left(n - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \frac{CC}{\alpha}(n-\gamma)$$

sein; weil diese Formel aus drei Teilen besteht, müssen die einzelnen mit dem zweiten Lemma zusammengeführt werden und für den ersten Teil wird $k = \frac{BB}{\alpha}$ und $\lambda = \beta$ sein, für den zweiten Teil ist $k = \frac{2BC}{\alpha}$ und $\lambda = \frac{\beta+\gamma}{2}$, für den dritten Teil ist $k = \frac{CC}{\alpha}$ und $\lambda = \gamma$, woher aus allen zusammengenommen

$$f'' : n = \frac{BB}{2\alpha^2}n(n+\alpha-2\beta) + \frac{2BC}{2\alpha^2}n(n+\alpha-\beta-\gamma) + \frac{CC}{2\alpha^2}n(n+\alpha-2\gamma)$$

berechnet wird.

§21 Wir wollen nun zur dritten Gleichung voranschreiten und werden für ihre rechte Seite haben

$$Bf'' : (n-\beta) = \frac{B^3}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta) + \frac{2BBC}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-\gamma)$$
$$+\frac{BCC}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-\beta-2\gamma),$$
$$Cf'' : (n-\gamma) = \frac{C^3}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-3\gamma) + \frac{BBC}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)$$
$$+\frac{2BCC}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-2\gamma),$$

$$\text{Summe} = \frac{B^3}{2\alpha^2}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta) + \frac{3BBC}{2\alpha^2}(n+\alpha-2\beta-\gamma)\left(n-\frac{2\beta+\gamma}{3}\right)$$
$$+\frac{3BCC}{2\alpha^2}(n+\alpha-\beta-2\gamma)\left(n-\frac{\beta+2\gamma}{3}\right) + \frac{C^3}{2\alpha^2}(n-\gamma)(n+\alpha-3\gamma);$$

weil diese aus vier mit dem dritten Lemma zusammenzuführenden Teilen besteht, wird für den ersten Teil $k = \frac{B^3}{2\alpha^2}$ und $\lambda = \beta$, für den zweiten Teil wird $k = \frac{3BBC}{2\alpha^2}$ und $\lambda = \frac{2\beta+\gamma}{3}$ sein, für den dritten Teil ist hingegen $k = \frac{3BCC}{2\alpha^2}$ und $\lambda = \frac{\beta+2\gamma}{3}$, schließlich ist für den vierten Teil $k = \frac{C^3}{2\alpha^2}$ und $\lambda = \gamma$, nach Bemerken von welchen die gesuchte Funktion f''' ebenso aus vier Teilen bestehen wird, welche sind:

$$\begin{aligned}
f''' : n = \ & \frac{B^3}{6\alpha^3}\ n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta) \\
+ \ & \frac{3BBC}{6\alpha^3} n(n+\alpha-2\beta-\gamma)(n+2\alpha-2\beta-\gamma) \\
+ \ & \frac{3BCC}{6\alpha^3} n(n+\alpha-\beta-2\gamma)(n+2\alpha-\beta-2\gamma) \\
+ \ & \frac{C^3}{6\alpha^3}\ n(n+\alpha-3\gamma)(n+2\alpha-3\gamma).
\end{aligned}$$

§22 Wir wollen in gleicher Weise die vierte Gleichung behandeln und aus dem gefundenen Wert werden wir haben

$$
\begin{aligned}
Bf''' : (n-\beta) = &\ \frac{B^4}{6\alpha^3}\ (n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)\\
&+ \frac{3B^3C}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)\\
&+ \frac{3B^2C^2}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)\\
&+ \frac{BC^3}{6\alpha^3}\ (n-\beta)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)\\
Cf''' : (n-\gamma) = &\ \frac{B^3C}{6\alpha^3}\ (n-\gamma)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)\\
&+ \frac{3B^2C^2}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)\\
&+ \frac{3BC^3}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)\\
&+ \frac{C^4}{6\alpha^3}\ (n-\gamma)(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma)
\end{aligned}
$$

Nach Sammeln dieser Terme wird der Wert der Formel

$$Bf''' : (n-\beta) + Cf''' : (n-\gamma)$$

aus den folgenden fünf Teilen bestehen

$$
\begin{aligned}
& \frac{B^4}{6\alpha^3}\ (n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta) \\
+\ & \frac{4B^3C}{6\alpha^3}\left(n-\frac{3\beta+\gamma}{4}\right)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma) \\
+\ & \frac{6B^2C^2}{6\alpha^3}\left(n-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma) \\
+\ & \frac{4BC^3}{6\alpha^3}\left(n-\frac{\beta+3\gamma}{4}\right)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma) \\
+\ & \frac{C^4}{6\alpha^3}\ (n-\gamma)(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma).
\end{aligned}
$$

§23 Weil ja also die gesuchte Funktion $f^{\mathrm{IV}}:n$ aus fünf Teilen zusammengesetzt wird, müssen sie mit dem vierten Lemma verglichen werden und für den ersten Teil wird $k=\frac{B^4}{6\alpha^3}$ und $\lambda=\beta$ sein, für den zweiten Teil ist $k=\frac{4B^3C}{6\alpha^3}$ und $\lambda=\frac{3\beta+\gamma}{4}$, für den dritten $k=\frac{6B^2C^2}{6\alpha^3}$ und $\lambda=\frac{\beta+\gamma}{2}$, für den vierten Teil ist $k=\frac{4BC^3}{6\alpha^3}$ und $\lambda=\frac{\beta+3\gamma}{4}$, schließlich wird für den fünften Teil $k=\frac{C^4}{6\alpha^3}$ und $\lambda=\gamma$ sein; daher wird man Sammeln aller Terme finden:

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{IV}}:n=\ & \frac{B^4}{24\alpha^4}\ n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta) \\
+\ & \frac{4B^3C}{24\alpha^4}\ n(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)(n+3\alpha-3\beta-\gamma) \\
+\ & \frac{6B^2C^2}{24\alpha^4} n(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)(n+3\alpha-2\beta-2\gamma) \\
+\ & \frac{4BC^3}{24\alpha^4}\ n(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)(n+3\alpha-\beta-3\gamma) \\
+\ & \frac{C^4}{24\alpha^4}\ n(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma)(n+3\alpha-4\gamma).
\end{aligned}
$$

§24 Es wäre überflüssig, diese Rechnungen weiter zu verfolgen, weil ja aus dem bereits Gezeigten schon sicher geschlossen werden kann, dass die folgende Funktion $f^{\mathrm{V}} : n$ diesen Wert haben wird:

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{V}} : n = \; & \frac{B^5}{120\alpha^5}\, n(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta)(n+4\alpha-5\beta)\\
+ \; & \frac{5B^4C}{120\alpha^5}\, n(n+\alpha-4\beta-\gamma)(n+2\alpha-4\beta-\gamma)(n+3\alpha-4\beta-\gamma)(n+4\alpha-4\beta-\gamma)\\
+ \; & \frac{10B^3C^2}{120\alpha^5} n(n+\alpha-3\beta-2\gamma)(n+2\alpha-3\beta-2\gamma)(n+3\alpha-3\beta-2\gamma)(n+4\alpha-3\beta-2\gamma)\\
+ \; & \frac{10B^2C^3}{120\alpha^5} n(n+\alpha-2\beta-3\gamma)(n+2\alpha-2\beta-3\gamma)(n+3\alpha-2\beta-3\gamma)(n+4\alpha-2\beta-3\gamma)\\
+ \; & \frac{5BC^4}{120\alpha^5}\, n(n+\alpha-\beta-4\gamma)(n+2\alpha-\beta-4\gamma)(n+3\alpha-\beta-4\gamma)(n+4\alpha-\beta-4\gamma)\\
+ \; & \frac{C^5}{120\alpha^5}\, n(n+\alpha-5\gamma)(n+2\alpha-5\gamma)(n+3\alpha-5\gamma)(n+4\alpha-5\gamma),
\end{aligned}
$$

woher die Bildungsweise aller folgenden Funktionen hinreichend deutlich erkannt wird.

§25 Wenn also all diese Werte, welche wir für die Funktionen $f' : n$, $f'' : n$, $f''' : n$ etc. gefunden haben, zu einer Summe gesammelt werden und wegen $f^0 : n = 1$ die Einheit vorangestellt wird, wird man die gewünschte Reihe erhalten, welche natürlich den Wert der Potenz Z^n ausdrückt, und daher ist es nicht nötig, dass wir all diese Funktionen hier erneut gesammelt darstellen.

KOROLLAR

§25a Also bestehen diese Reihen aus unendlich vielen Term, in denen alle möglichen Kombinationen der Buchstaben B und C auftreten. Ja, sogar für eine beliebige Kombination, welche B^bC^c sei, wird im Allgemeinen der sie beinhaltende Term angegeben werden können. Denn zuerst werde diese Form mit der Anzahl aller Kombinationen multipliziert; wenn dieser, nachdem der Kürze wegen $b+c=i$ gesetzt worden ist, mit dem Buchstaben N bezeichnet wird, wird er, wie bekannt ist, $N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdots c}$ sein; weiter, wenn wir $b\beta + c\gamma$ setzen, wird der dieser Form entsprechende Term

$$\frac{NB^bC^c}{1\cdot 2\cdot 3\cdots i\alpha^i}n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-1)\alpha-\theta)$$

sein. Wie beispielsweise, wenn die Form B^3C^2 vorgelegt war, wird $i=5$ und daher $N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=10$ sein, dann wird aber $\theta=3\beta+2\gamma$ sein und so wird der Term dieser Form selbst

$$\frac{10B^3C^2}{120\alpha^5}n(n+\alpha-3\beta-2\gamma)(n+2\alpha-3\beta-2\gamma)(n+3\alpha-3\beta-2\gamma)(n+4\alpha-3\beta-2\gamma)$$

sein, genauso wie er oben dargeboten worden ist.

Scholion

§26 Daher ist schon im Überfluss klar, wenn die vorgelegte Gleichung aus noch mehr Termen besteht und diese Form hat

$$1-\frac{1}{Z^\alpha}=\frac{B}{Z^\beta}+\frac{C}{Z^\gamma}+\frac{D}{Z^\delta}+\frac{E}{Z^\varepsilon}+\text{etc.},$$

dass dann mithilfe derselben Methode die unendliche Reihe ausfindig gemacht werden kann, welche den Wert der Potenz Z^n ausdrückt; denn diese Reihe, beginnend mit der Einheit, wird unendlich viele Terme gebildet aus vollkommen allen Kombinationen der Buchstaben B, C, D, E etc. beinhalten. Wenn nämlich im Allgemeinen diese Kombination $B^bC^cD^dE^e$ vorgelegt wird, setze man zuerst $b+c+d+e=i$ und suche die Zahl N, dass

$$N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots c\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots d\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots e}$$

ist, und es sei der Kürze wegen $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i=I$; der erste Faktor dieses Terms wird

$$\frac{NB^bC^cD^dE^e}{I\alpha^i}$$

sein, außerdem sind aber die den Exponenten n involvierenden Faktoren hinzuzufügen, für das Finden von welchen man

$$b\beta+c\gamma+d\delta+e\varepsilon=\theta$$

setze, und diese an der Zahl i Faktoren werden

$$n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-1)\alpha-\theta)$$

sein, sodass der ganze Term

$$\frac{NB^bC^cD^dE^e}{I\alpha^i}n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\cdots(n+(i-1)\alpha-\theta)$$

ist. Deswegen scheint bezüglich Beschaffenheit dieser höchst merkwürdigen Reihen, welche ich vor einiger Zeit in Buch XV. der NOVORUM COMMENTARIORUM genauer, aber ohne Beweis beschrieben habe, nichts weiter zu wünschen übrig.